Hochschule für Technik
Stuttgart

Mathe-Cup 2016

Speedwettbewerb

Hinweise:

Die Aufgaben haben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad. Trotzdem gibt es für jede korrekte gelöste Aufgabe genau 2 Punkte. Für Aufgaben, die teilweise gelöst wurden, kann es Teilpunkte geben.

Bitte tragen Sie die Lösung, die bei den meisten Aufgaben aus einer einzelnen Zahl besteht, in das Kästchen am Rand unterhalb der Aufgabe ein.

Die Aufgaben sind (ungefähr) nach Schwierigkeitsgrad sortiert. Es sind wahrscheinlich deutlich mehr Aufgaben, als Sie in der vorgegebenen Zeit schaffen können.

Viel Erfolg!

1. Wie lautet der größte einstellige Teiler der Zahl, deren Dezimaldarstellung genau aus 2016 Einsen besteht?

2. Multiplizieren Sie 993 mit 1007.

3. Von 100 Schülern eines Jahrgangs essen 67 in der großen Pause ein belegtes Brot, 22 essen Schokoriegel und 24 essen nichts. Wie viele Schüler essen Brot und Schokoriegel?

4. Ein Vater ist dreimal so alt wie seine Tochter. In sechs Jahren wird er fünfmal so alt sein, wie die Tochter vor sechs Jahren war.

   Wie alt sind Vater und Tochter heute?

5. Anton sagt: „Berta lügt!“ Berta sagt: „Stefan lügt!“ Stefan sagt: „Anton und Berta lügen beide!“

   Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

6. Die Fakultät einer natürlichen Zahl ist definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Beispielsweise ist $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

   Bestimmen Sie die beiden Endziffern der Zahl

$$2! + 4! + 6! + 8! + \ldots + 2016!$$

7. Bestimmen Sie das 2016ste Folgeglied x_{2016} von der Folge, die durch

$$x_0 = 2, x_1 = 3, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \qquad n \geq 0,$$

   gegeben ist.

$\mathbf{x_{2016}} =$

8. Genau eines der folgenden Paare ist keine Lösung des Gleichungssystems $187x - 104y = 41$. Welches Paar ist es?

   1. $x = 3, y = 5$,
   2. $x = 107, y = 192$,
   3. $x = 211, y = 379$,
   4. $x = 314, y = 565$,
   5. $x = 419, y = 753$.

9. Die Oberfläche eines hölzernen Würfels mit der Kantenlänge $n \in \mathbb{N}$ wird schwarz angestrichen. Dann wird dieser Würfel mit Schnitten parallel zu den Würfelflächen in Würfel der Kantenlänge 1 zersägt. Wie viele kleine Würfel gibt es dann, bei denen keine, eine, zwei oder drei Flächen schwarz gefärbt sind?

Es gibt

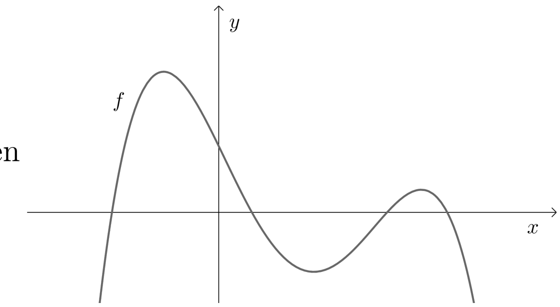
_____________ kleine Würfel mit keiner,

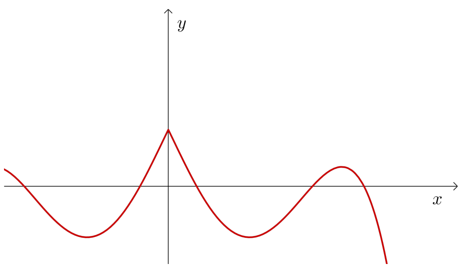
_____________ mit einer,

_____________ mit zwei und

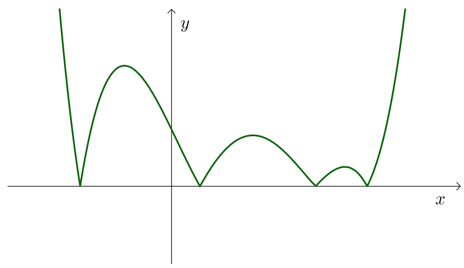
_____________ mit drei gefärbten Seiten.

10. Rechts ist das Schaubild einer Funktion f dargestellt.
Welches der Schaubilder A bis D gehört zu den Funktionen $f(|x|), |f(x)|, f(x^2)$ und $(f(x))^2$?

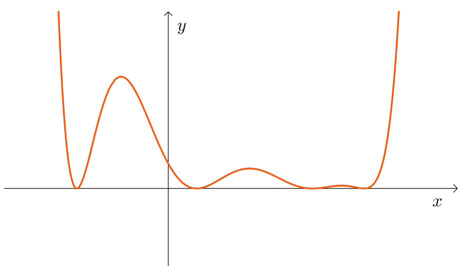




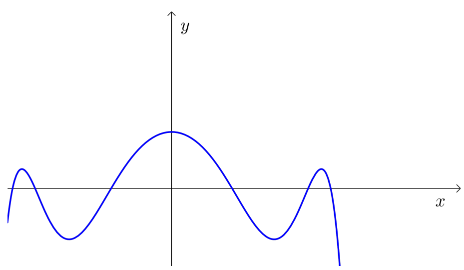
A



B



C



D

A ______________

B ______________

C ______________

D ______________

11. Bei einem Test mit 26 Fragen gibt es für jede korrekte Antwort 8 Punkte und für jede falsche Antwort werden 5 Punkte abgezogen. Wie viele korrekte Antworten hat ein Teilnehmer, der alle Fragen beantwortet hat und insgesamt 0 Punkte erreichte?

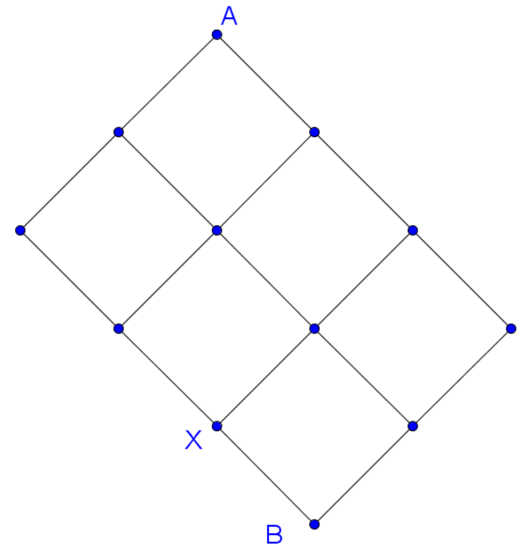
12. Zwei Radfahrer starten um 14:10 Uhr im selben Punkt. Der eine fährt mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h direkt nach Norden, der andere mit einer Geschwindigkeit von 16 km/h direkt nach Osten. Wann sind sie genau 10 km voneinander entfernt?

13. Ein Läufer läuft eine Strecke mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h. Auf dem Rückweg nimmt der dieselbe Strecke, ist aber erschöpft und geht nur noch mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

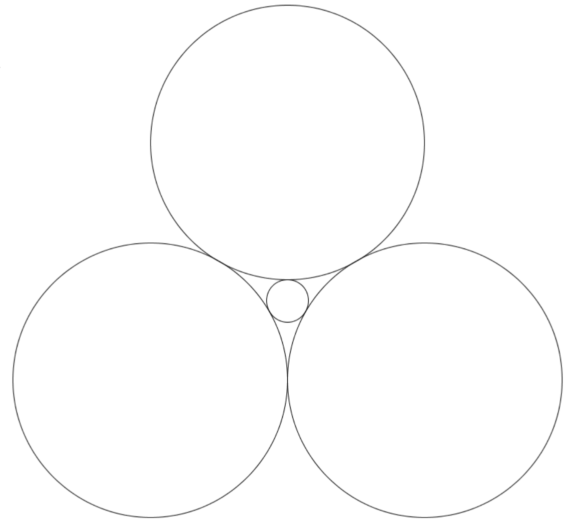
14. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent, d.h. logisch gleichbedeutend?

   (A) Wenn mein Team den letzten Wettbewerb verloren hat, dann muss es auch die Gesamtwertung verloren haben.
   (B) Wenn mein Team den letzten Wettbewerb verloren hat, dann hat dein Team die Gesamtwertung gewonnen.
   (C) Wenn mein Team den letzten Wettbewerb verloren hat, dann hat es die Gesamtwertung gewonnen.
   (D) Wenn mein Team die Gesamtwertung gewonnen hat, dann hat es den letzten Wettbewerb gewonnen
   (E) Wenn mein Team den letzten Wettbewerb gewonnen hat, dann hat es die Gesamtwertung gewonnen.
   (F) Wenn mein Team die Gesamtwertung verloren hat, dann muss es den letzten Wettbewerb verloren haben.

15. Eine Flipperkugel läuft auf dem dargestellten Gitter von Punkt A nach Punkt B. An Verzweigungsstellen läuft sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder nach rechts.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf ihrem Weg am Punkt X vorbeikommt?



16. Die drei großen Kreise haben den gleichen Radius R. Jeder Kreis berührt die drei anderen. Wie groß ist der Radius r des kleinen Kreises in Abhängigkeit von R?
Hinweis: Der Kosinus von 30 Grad beträgt $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



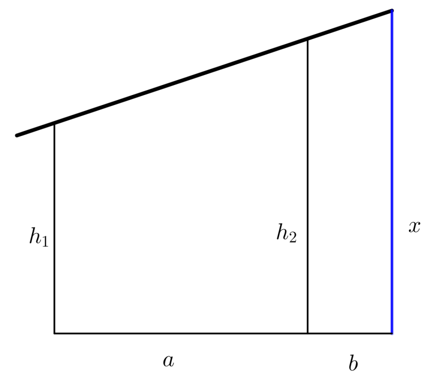
17. Ein Gitterpunkt ist ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, d.h. (x, y) mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Wie viele Gitterpunkte gibt es mit

$$|x| + |y| \leq 10?$$

18. Für eine Funktion gilt $f(x^2+1) = 2x^4 + x^2 - 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f(x)$?

19. Gegeben ist ein Divisor $n \in \mathbb{N}$, der beim Dividieren mit den Dividenden 1108, 1453, 1844, 2281 stets den selben Rest lässt. Wie groß ist n?

20. Die abgebildete Hütte soll abgestützt werden. Wie lang muss der Balken gewählt werden, wenn gemessen wird ($a = 5,5$ m, $b = 0,5$ m, $h_1 = 2,3$ m und $h_2 = 3,4$ m)?



21. Für eine Funktion f gilt $f(x) = 4f(-x) - 3x$. Welchen Wert hat $f(5)$?

22. Gibt es in jedem Jahr einen Freitag, der auf einen 13. fällt? Wie viele solche Tage kann es in einem Jahr höchstens geben? Sie können davon ausgehen, dass es sich bei dem Jahr nicht um ein Schaltjahr handelt.

(Bitte ankreuzen und ggf. ausfüllen)

- ◯ Es ist möglich, dass es keinen Freitag, den 13., gibt.
- ◯ Es gibt mindestens einen und höchstens ______________ Freitage, die auf einen 13. fallen.

23. Jemand behauptet: Jede natürliche Zahl größer als 1 ist eine Primzahl oder kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.

    Finden Sie ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass diese Aussage falsch ist.

    Hinweis: Eine Primzahl ist eine Zahl $n \geq 2$, die nur sich selbst und die 1 als Teiler besitzt.

24. Begründen Sie: Wenn sich sechs Personen treffen, gibt es eine Teilmenge von drei Personen, die sich entweder völlig fremd sind, oder die sich entweder alle drei paarweise kennen.